प्रश्नपत्र का प्रारूप

गणित - कक्षा 12

समय : 3 घंटे
पूर्णांक : 100

प्रश्नपत्र के विभिन्न आयामों पर अंक भारण निम्नलिखित अनुसार है।

(A) विभिन्न उप-विषय/विषय-वस्तु यूनिट पर भारण

क्रम संख्या	उप-विषय	अंक
1.	संबंध एवं फलन	10
2.	बीजगणित	13
3.	कलन	44
4.	सदिश एवं त्रिविमीय-ज्यामिति	17
5.	रैखिक प्रोग्रामन	06
6.	प्रायिकता	10
	कुल योग	**100**

(B) प्रश्नों के विभिन्न प्रकार पर भारण

क्रम संख्या	प्रश्न का प्रकार	प्रत्येक प्रश्न पर अंक	प्रश्नों की कुल संख्या	अंक
1.	बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ/ अति लघु उत्तरीय प्रश्न	01	10	10
2.	लघु उत्तरीय प्रश्न	04	12	48
3.	दीर्घ उत्तरीय प्रश्न	06	07	42
		कुल योग	**29**	**100**

(C) चुनाव/विकल्प की योजना

प्रश्नपत्र के विभिन्न भागों में विकल्प का प्रावधान नहीं है। तथापि चार अंकों वाले चार प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प का प्रावधान है।

ब्लू प्रिंट

यूनिट/प्रश्न का प्रकार	बहु विकल्पी/अति लघु उत्तरीय प्रश्न	लघु उत्तरीय प्रश्न	दीर्घ उत्तरीय	योग
संबंध एवं फलन	-	4 (1)	6 (1)	10 (2)
बीज गणित	3 (3)	4 (1)	6 (1)	13 (5)
कलन	4 (4)	28 (7)	12 (2)	44 (13)
सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति	3 (3)	8 (2)	6 (1)	17 (6)
रैखिक प्रोग्रामन	–	–	6 (1)	6 (1)
प्रायिकता	–	4 (1)	6 (1)	10 (2)
योग	**10 (10)**	**48 (12)**	**42 (7)**	**100(29)**

खंड -A

प्रश्न संख्या 1 से 3 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

1. यदि $*$ एक ऐसी द्विआधारी संक्रिया है, जो $*: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, इस प्रकार की है कि $a * b = a + b^2$, तो $-2*5$ का मान है,

(A) –52 (B) 23 (C) 64 (D) 13

2. यदि $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ एक फलन है, तो $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ बराबर है।

(A) $\frac{-\pi}{6}$ (B) $\frac{-\pi}{6}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{7\pi}{6}$

3. दिया हुआ है कि $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ दोनों पक्षों पर प्रारम्भिक पंक्ति रूपान्तरण $R_1 \to R_1 - 2R_2$ का प्रयोग करने पर, हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है

(A) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. यदि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है तथा $|A| = 5$ है, तो $|\text{adj. } A|$ का मान क्या है?

5. यदि A तथा B कोटि 3 के वर्ग आव्यूह, इस प्रकार के हैं कि $|A| = -1$ तथा $|B| = 4$, तो $|3(AB)|$ का मान क्या है?

प्रश्न संख्या 6, 7 तथा 8 में से प्रत्येक में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

6. अवकलज समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ की घात _______ है।

7. रैखिक अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ को हल करने के लिए समाकलन गुणक ________ है।

8. $|\hat{i} - \hat{j}|^2$ का मान ________ है।

9. समतल $3x + 4y - 7 = 0$ तथा $6x + 8y + 6 = 0$ के बीच की दूरी क्या है?

10. यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है तथा $(\vec{x} - \vec{a}).(\vec{x} + \vec{a}) = 99$ है, तो $|\vec{x}|$ का मान क्या है?

खंड-B

11. मान लीजिए कि n एक धन पूर्णांक है तथा R एक संबंध **Z** में इस प्रकार परिभाषित है कि $\forall\ a, b \in \mathbf{Z}, a \text{ R } b$ यदि और केवल यदि $a - b$ n से भाज्य है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

12. सिद्ध कीजिए कि $\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18 = \cot^{-1}3$.

अथवा

समीकरण $\tan^{-1}(2+x) + \tan^{-1}(2-x) = \tan^{-1}\frac{2}{3}, -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ को हल कीजिए?

13. x के लिए हल कीजिए, $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

अथवा

यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ तथा $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)' = B'A'$.

14. k का मान निर्धारित कीजिए जिससे फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k.\cos 2x}{\pi - 4x}, & \text{यदि } x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ 5, & \text{यदि } x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$x = \dfrac{\pi}{4}$ पर संतत हो।

15. यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}$ है, तो दर्शाइए कि $(1 - x^2)\dfrac{d^2 y}{d^2 x} - x\dfrac{dy}{dx} - a^2 y = 0$

16. वक्र $x = \sin 3t$, $y = \cos 2t$ की, $t = \dfrac{\pi}{4}$ पर, स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

अथवा

उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ निरंतर वर्धमान अथवा निरंतर ह्रासमान है।

17. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos^3 x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

18. $\int \dfrac{3x+1}{2x^2 - 2x + 3} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

$\int x.(\log x)^2 dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

19. अवकल समीकरण $2y\, e^{\frac{x}{y}} dx + (y - 2x e^{\frac{x}{y}})\, dy = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $x = 0$ जब $y = 1$

20. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ है, तो $\vec{b} + \vec{c}$ का $\vec{a}$ के अनुदिश प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

21. बिन्दु (1, 2, –4) से हो कर जाने वाली तथा रेखाओं $\vec{r} = (8\hat{i} - 16\hat{j} + 10\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k})$ और $\vec{r}\ (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$ पर लंब रेखा का सदिश समीकरण निर्धारित कीजिए।

22. तीन सिक्कों में से एक अनभिनत सिक्का है, जिसे उछालने पर 60% पट आता है, दूसरा भी अनभिनत सिक्का है, जिसे उछालने पर 75% चित आता है तथा तीसरा अनभिनत सिक्का है। तीनों सिक्कों में से एक यादृच्छया चुना जाता है और फिर उछाला जाता है, जिस पर चित आता है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि यह अनभिनत सिक्का होगा?

खंड-C

23. A^{-1} ज्ञात कीजिए जबकि $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ है। अतः निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए: $4x + 2y + 3z = 2,\; x + y + z = 1,\; 3x + y - 2z = 5$

अथवा

प्रारम्भिक रूपांतरणों का प्रयोग करके, A^{-1} ज्ञात कीजिए, जबकि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

24. सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त तिर्यक ऊँचाई वाले अधिकतम आयतन के शंकु का अर्ध शीर्षकोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ है।

25. योगफल की सीमा विधि से $\int_{3}^{3}(3x^2 + 2x + 5)\, dx$ का मान निकालिए।

26. समाकलन का प्रयोग करके, घन x-अक्ष तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के, बिंदु $(1, \sqrt{3})$ पर, अभिलम्ब एवं स्पर्श रेखा द्वारा बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

27. समतलों $x + 3y + 6 = 0$ तथा $3x - y - 4z = 0$ के प्रतिच्छेदन से हो कर जाने वाले और मूल बिंदु से इकाई लंबवत दूरी वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

अथवा

बिंदु (3, 4, 5) से समतल $x + y + z = 2$ की, रेखा $2x = y = z$ के समान्तर नापी गई, दूरी ज्ञात कीजिए।

28. चार खराब बल्ब संयोग से 6 अच्छे बल्बों में मिल गए हैं। यदि किसी बल्ब को केवल देख कर, यह कहना संभव नहीं है कि वह खराब है या नहीं, तो खराब बल्बों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए, यदि इस ढेर में से चार बल्ब यादृच्छया निकाले जाते हैं।

29. एक फ़र्नीचर फ़र्म कुर्सी और मेज़ बनाती है, जिनमें से प्रत्येक के लिए A, B तथा C तीन मशीनों की आवश्यकता पड़ती है। एक कुर्सी को बनाने के लिए मशीन A पर 2 घंटे, मशीन B पर 1 घंटा तथा मशीन C पर एक घंटा काम करने की आवश्यकता है। प्रत्येक मेज़ के लिए A और B मशीनों में से प्रत्येक पर 1 घंटा तथा मशीन C पर 3 घंटे काम करने की आवश्यकता पड़ती है। एक कुर्सी को बेचने पर 30 रु. लाभ प्राप्त होता है, जबकि एक मेज़ पर 60 रु. लाभ प्राप्त होता है। प्रति सप्ताह मशीन A पर कुल 70 घंटे, मशीन B पर कुल 40 घंटे तथा मशीन C पर कुल 90 घंटे काम करने के लिए उपलब्ध हैं। प्रत्येक सप्ताह कितनी कुर्सियाँ तथा मेज़ें बनानी चाहिए, जिससे लाभ का अधिकतमीकरण हो सके? इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रण कीजिए तथा इसे आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए।

अंकन योजना

खंड-A

1. (B) **2.** (D) **3.** (B)

4. 25 **5.** –108 **6.** 2 **7.** $\frac{1}{x}$ **अंक**

8. 2 **9.** 2 इकाई **10.** 10 $1 \times 10 = 10$

खंड-B

11. (i) क्योंकि $a \text{ R } a, \forall a \in Z$ तथा 0 भाज्य है n से इसलिए R स्वतुल्य है। 1

(ii) $a\text{R}b \Rightarrow a - b$ n से भाज्य है, तो $b - a$ भी n से भाज्य है, अतः $b \text{ R } a$.
इसलिए R सममित है 1

(iii) मान लीजिए कि $a,b,c, \in \mathbf{Z}$ के लिए $a \text{ R } b$ तथा $b \text{ R } c$, तो $a - b = n\, p$, $b - c = n\, q$, किसी $p, q \in \mathbf{Z}$ के लिए।

इसलिए $a - c = n\,(p + q)$ और इस प्रकार $a \text{ R } c$. 1

अतः R संक्रामक भी है और इसलिए यह एक तुल्यता संबंध है। 1

12. LHS $= \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18}$ 1

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{8}} + \tan^{-1}\frac{1}{18} = \tan^{-1}\left(\frac{15}{55}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{18}$$ 1

$$= \tan^{-1}\frac{3}{11} + \tan^{-1}\frac{1}{18} = \tan^{-1}\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\ \frac{1}{18}} = \tan^{-1}\frac{65}{195}$$ 1

$$= \tan^{-1}\frac{1}{3} = \cot^{-1}3 = \text{RHS}$$ 1

अथवा

क्योंकि $\tan^{-1}(2 + x) + \tan^{-1}(2 - x) = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

इसलिए $\tan^{-1}\frac{(2+x)+(2-x)}{1-(2+x)(2-x)} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$ $1\frac{1}{2}$

अतः $\frac{4}{x^2-3} = \frac{2}{3}$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ 1

13. दिया हुआ है कि $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

$R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$, के प्रयोग द्वारा, $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$ $1\frac{1}{2}$

$C_2 \to C_2 - C_1$
$C_3 \to C_3 - C_1$, द्वारा $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -3 \\ 4 & -11 & -1 \\ -3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0$ $\quad 1\frac{1}{2}$

इसलिए $(x + 2)(-111) - 4(37) - 3(-37) = 0$ जिसे हल करने पर $x = -\frac{7}{3}$ $\quad 1$

अथवा

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 15 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad 1$$

इसलिए, $\quad LHS = (AB)' = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad 1$

$RHS = B'A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ इसलिए, LHS = RHS $\quad 1+1$

14. क्योंकि $x = \frac{\pi}{4}$ पर f संतत है, अतः $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = 5.$ $\quad \frac{1}{2}$

अब $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{k.\cos 2x}{\pi - 4x} = \lim_{y\to 0} \frac{k\cos 2(\frac{\pi}{4} - y)}{\pi - 4(\frac{\pi}{4} - y)}$, where $\frac{\pi}{4} - x = y$, $\quad 1\frac{1}{2}$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{k.\cos(\frac{\pi}{2} - 2y)}{\pi - \pi + 4y} = \lim_{y\to 0} \frac{(k\sin 2y)}{2.\,2y} = \frac{k}{2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

इसलिए $\frac{k}{2}=5 \quad \Rightarrow k=10.$ $\frac{1}{2}$

15. $y = e^{a\cos^{-1}x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{a\cos^{-1}x}\frac{(-a)}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{2}$

इसलिए $\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}= -a\,y.......(1)$ $\frac{1}{2}$

x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर,

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{dy}{dx} = -\frac{ady}{dx}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow (1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\,\frac{dy}{dx} = -a\,\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}$$ $\frac{1}{2}$

$= -a\,(-ay)$ [(1) द्वारा] $\frac{1}{2}$

अतः $(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$ $\frac{1}{2}$

16. $\frac{dx}{dt} = +\,3\cos 3t,\ \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$ 1

इसलिए, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sin 2t}{3\cos 3t}$, तथा $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-2\sin\frac{\pi}{2}}{3\cos 3\frac{\pi}{4}} = \frac{-2}{3.(-\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 1

साथ ही $x = \sin 3t = \sin 3\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $y = \cos 2t = \cos\,\frac{\pi}{2} = 0.$

इसलिए स्पर्श बिंदु $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ है 1

अतः स्पर्श रेखा का समीकरण निम्नलिखित है, $y - 0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

अथवा $2\sqrt{2}\,x - 3y - 2 = 0$ 1

अथवा

$f'(x) = 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x$

$= -4\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= -\sin 4x$. 1

इसलिए, $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\pi}{4}$

अब $0 < x < \frac{\pi}{4}$, के लिए $f'(x) < 0$ 1

अतः f अंतराल $(0, \frac{\pi}{4})$ में f निरंतर ह्रासमान है। $1\frac{1}{2}$

इसी प्रकार हम दिखला सकते हैं कि अंतराल $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ में f निरंतर वर्धमान है $\frac{1}{2}$

17. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x(1 - \sin^2 x)\cos x \, dx$ 1

$= \int_0^{\frac{1}{2}} t^4(1 - t^2)\, dt$, जहाँ $\sin x = t$ 1

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (t^4 - t^6)\, dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$ 1

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{28}\right) = \frac{23}{4480}$$ 1

18. $$I = \int \frac{3x+1}{2x^2-2x+3}\, dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x-2)+\frac{5}{2}}{2x^2-2x+3}\, dx$$ 1

$$= \frac{3}{4}\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+3}\, dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x^2 - x + \frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\log|2x^2-2x+3| + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{4}\log|2x^2-2x+3| + \frac{5}{4}\frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c$$ $1\frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{4}\log|2x^2-2x+3| + \frac{\sqrt{5}}{2} \tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c$$

अथवा

$$I = \int x(\log x)^2 . dx = \int (\log x)^2\, x\, dx$$

$$= (\log x)^2 \frac{x^2}{2} - \int 2\log x \frac{1}{x}\frac{x^2}{2} dx$$ 1

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \log x .\ x\ dx$$ $\frac{1}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \left[\log x . \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^2}{2}\ dx\right]$$ 1½

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\ \log x + \frac{x^2}{4} + c$$ 1

19. प्रदत्त अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x e^{\frac{x}{y}} - y}{2y . e^{\frac{x}{y}}}$$ $\frac{1}{2}$

$\frac{x}{y} = v$ रखिए $\Rightarrow x = vy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$ $\frac{1}{2}$

इसलिए, $v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,ye^v - y}{2ye^v} = \frac{2v\,e^v - 1}{2e^v}$ $\frac{1}{2}$

या $y\frac{dv}{dy} = \frac{2ve^v - 1}{2e^v} - v$ अत: $2e^v dv = -\frac{dy}{y}$ 1

$\Rightarrow 2e^v = -\log|y| + c$ 1

जब $x = 0,\ y = 1$

या $2e^{\frac{x}{y}} = -\log|y| + c \quad \Rightarrow\ 2 = c$ $\frac{1}{2}$

तो समीकरण का विशिष्ट हल है $2e^{\frac{x}{y}} = -\log|y| + 2$ 1

20. $\vec{b}+\vec{c}=(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})=3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ 1

$\vec{a}=2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$(\vec{b}+\vec{c})$ का $\vec{a}$ के अनुदिश प्रक्षेप $=\dfrac{(\vec{b}+\vec{c}).\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 1

$\dfrac{6-2+1}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{5}{3}$ इकाई 1+1

21. दी हुई रेखाओं पर लम्ब सदिश निम्नलिखित है,

$$(3\hat{i}-16\hat{j}+7\hat{k})\times(3\hat{i}+8\hat{j}-5\hat{k}) = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -16 & 7\\ 3 & 8 & -5\end{vmatrix}$$

$1\frac{1}{2}$

$=24\hat{i}+36\hat{j}+72\hat{k}$ or $12(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ 1

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण निम्नलिखित है,

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ $\frac{1}{2}$

22. मान लीजिए कि,

E_1: पहले (अनभिनत) सिक्के का चयन

E_2: दूसरे (अनभिनत) सिक्के का चयन

E_3: तीसरे (अनभिनत) सिक्के का चयन

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \dfrac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$

मान लीजिए कि A: एक चित आने को निरूपित करता है

इसलिए, $P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{40}{100}$, $P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{75}{100}$, $P\left(\frac{A}{E_3}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad 1\frac{1}{2}$

$$P\left(\frac{E_3}{A}\right) = \frac{P(E_3)P\left(\frac{A}{E_3}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right) + P(E_3)P\left(\frac{A}{E_3}\right)} \quad \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{40}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{75}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{10}{33} \quad 1\frac{1}{2}$$

खंड–C

23. $|A| = 4(-3) - 1(-7) + 3(-1) = -12 + 7 - 3 = -8$ $\quad 1$

$A_{11} = -3 \quad A_{12} = 7 \quad A_{13} = -1$ $\quad 1\frac{1}{2}$

$A_{21} = 5 \quad A_{22} = -17 \quad A_{23} = -1$

$A_{31} = -2 \quad A_{32} = 2 \quad A_{33} = 2$

इसलिए, $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 7 & -17 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{2}$

दिया हुआ समीकरण निम्नलिखित प्रकार से भी लिखा जा सकता है,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A'.X = B \Rightarrow X = (A'^{-1})B$ 1

$= (A^{-1})'B$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 5 & -17 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & +7 & -5 = & -4 \\ 10 & -17 & -5 = & -12 \\ -4 & +2 & +10 = & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

अतः $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2},\ z = -1$ $\frac{1}{2}$

अथवा

Writing $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ $\frac{1}{2}$

$R_2 \to R_2 + R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ 1

$R_2 \to R_2 + 2R_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ 1

$$R_3 \to R_3 + 2R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$$

$$R_1 \to R_1 + 2R_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$$ 1

$$R_1 \to R_1 + 2R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$$ 1

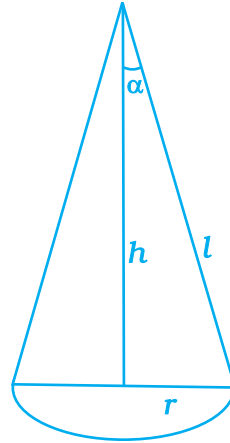
$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

24. आयतन $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\frac{1}{2}$

आकृति 2.1

$l^2 = h^2 + r^2$ $\frac{1}{2}$

$v = \frac{1}{3}\pi\ (l^2 - h^2)\ h = \frac{1}{3}\pi\ (l^2 h - h^3)$ 1

$\frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{3}(l^2 - 3h^2) = 0$ $1\frac{1}{2}$

$l = \sqrt{3}h, \quad r = \sqrt{2}h$ 1

$$\tan \alpha = \frac{r}{h} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\sqrt{2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\frac{d^2v}{dh^2} = -2\pi h < 0$$

अतः v का मान अधिकतम है। 1

25. $$I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx$$

$$= \lim_{h \to o} h\left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + \ldots + f(1+(n-1)h) \right] \quad \ldots (i)$$ 1

जहाँ $h = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

अब,

$$f(1) = 3 + 2 + 5 = 10$$

$$f(1+h) = 3 + 3h^2 + 6h + 2 + 2h + 5 = 10 + 8h + 3h^2$$

$$f(1+2h) = 3 + 12h^2 + 12h + 2 + 4h + 5 = 10 + 8.2.h + 3.2^2.h^2$$ $1\frac{1}{2}$

$$f(1+(n-1)h) = 10 + 8(n-1)\,h + 3(n-1)^2.h^2$$

$$I = \lim_{n \to \infty} h\left[10n + 8h\frac{n(n-1)}{2} + 3h^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right]$$ $1\frac{1}{2}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n}\left[10n + \frac{16}{n}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{12}{n^2}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right]$$ $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[10n+8(n-1)\frac{2}{n}(n-1)\ (2n-1)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left[10+8(1-\frac{1}{n})+2(1-\frac{1}{n})\ (2-\frac{1}{n})\right] \qquad 1$$

$$= 2\ [10 + 8 + 4] = 44 \qquad \frac{1}{2}$$

26. बिन्दु $(1,\sqrt{3})$ पर वक्र $x^2 + y^2 = 4$ की स्पर्श रेखा का समीकरण निम्नलिखित है,

$x + \sqrt{3}y = 4$. अतः $y = \dfrac{4-x}{\sqrt{3}}$ 1

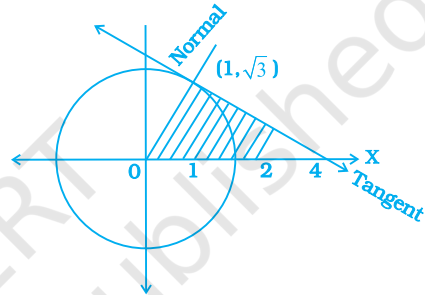
आकृति 2.2

अभिलम्ब का समीकरण $y = \sqrt{3}x$ है। 1

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^1 \sqrt{3}x\,d\,x + \int_1^4 \frac{4-x}{\sqrt{3}}dx$ 1

$$= \left(\sqrt{3}\ \frac{x^2}{2}\right)_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)_1^4 \qquad 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[8 - \frac{7}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ वर्ग इकाई} \qquad 2$$

27. अभीष्ट समतल का समीकरण

$$(x + 3y + 6) + \lambda\ (3x - y - 4z) = 0 \qquad 1\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (1 + 3\lambda)\, x + (3 - \lambda)\, y - 4\lambda z + 6 = 0$ $\qquad \frac{1}{2}$

मूल बिन्दु से समतल की लम्बवत दूरी $= \dfrac{6}{\sqrt{(1+3\lambda)^2 + (3-\lambda)^2 + (-4\lambda)^2}}$

इसलिए, $\dfrac{6}{\sqrt{(1+3\lambda)^2 + (3-\lambda)^2 + (-4\lambda)^2}} = 1$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

या $36 = 1 + 9\lambda^2 + 6\lambda + 9 + \lambda^2 - 6\lambda + 16\lambda^2$

या $26\lambda^2 = 26 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

अभीष्ट समतलों के समीकरण निम्नलिखित हैं,

$4x + 2y - 4z + 6 = 0$ तथा $-2x + 4y + 4z + 6 = 0$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

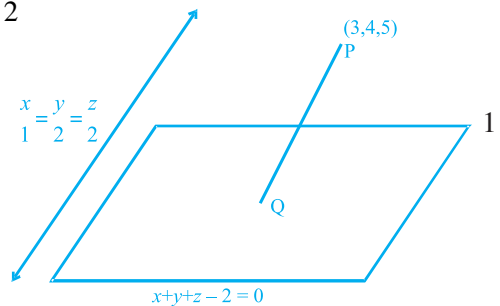
या $2x + y - 2z + 3 = 0$ तथा $x - 2y - 2z - 3 = 0$ $\qquad 1$

अथवा

रेखा का समीकरण $2x = y = z$ i.e. $\dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ $\qquad 1$

आकृति 2.3

या $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{2}$ $\qquad 1$

रेखा P Q का समीकरण

$\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-5}{2} = \lambda$ है। $\qquad 1$

$\Rightarrow Q(\lambda+3,\ 2\lambda+4, 2\lambda+5)$ समतल पर स्थित है।

इसलिए $\lambda+3+2\lambda+4+2\lambda+5-2=0$ $1\frac{1}{2}$

या $5\lambda=-10$ या $\lambda=-2$ जिससे Q के निर्देशांक (1, 0, 1) प्राप्त होता है,

अतः $PQ=\sqrt{4+16+16}=6$ इकाई $1\frac{1}{2}$

28. मान लीजिए कि X खराब बल्बों की संख्या को निरूपित करता है।

$$P(X=0) = \frac{{}^6C_4}{{}^{10}C_4} = \frac{6.5.4.3}{10.9.8.7} = \frac{1}{14}$$ 1

$$P(X=1) = \frac{{}^6C_3\ {}^4C_1}{{}^{10}C_4} = \frac{6.5.4.}{10.9.8.7}4 = \frac{8}{21}$$ 1

$$P(X=2) = \frac{{}^6C_2\ {}^6C_2}{{}^{10}C_4} = \frac{6.5.4.3}{10.9.8.7}.6 = \frac{3}{7}$$ 1

$$P(X=3) = \frac{{}^6C_1\ {}^6C_3}{{}^{10}C_4} = \frac{6.4.3.2}{10.9.8.7}.4 = \frac{4}{35}$$ 1

$$P(X=4) = \frac{{}^4C_4}{{}^{10}C_4} = \frac{4.3.2.1}{10.9.8.7} = \frac{1}{210}$$ 1

अतः बंटन निम्नलिखित है:

X :	0	1	2	3	4
P(X) :	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

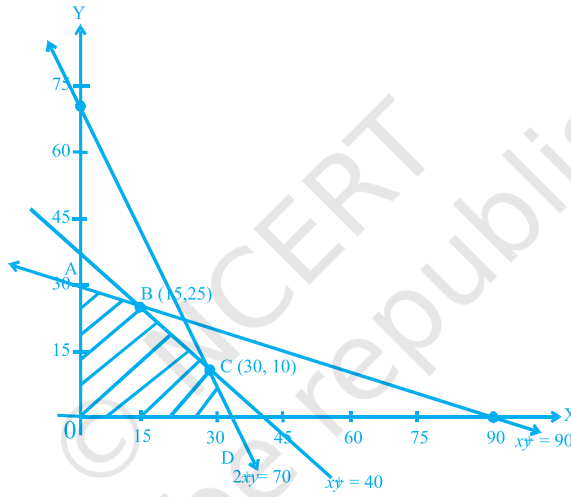
1

29. मान लीजिए कि प्रति सप्ताह बनाए जाने वाली कुर्सियों की संख्या x तथा मेज़ों की संख्या y है। अत: हमें निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत $P = 30x + 60y$ का अधिकतमीकरण करना है,

$$2x + y \leq 70$$

$$x + y \leq 40 \qquad 2$$

$$x + 3y \leq 90$$

$$x \geq 0 y \geq 0$$

आकृति 2.4

सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष निम्नलिखित हैं 2

A (0,30), B (15, 25), C (30,10), D (35, 0) $\frac{1}{2}$

P (A पर) = 30 (60) = 1800

P (B पर) = 30 (15 + 50) = 1950

P (C पर) = 30 (30 + 20) = 1500 $1\frac{1}{2}$

P (D पर) = 30 (35) = 1050

15 कुर्सियों तथा 25 मेजों के लिए P अधिकतम है।